

1 Allgemeine Netzwerkanalyse

V 1.1: Ausgabe der Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung mit der Nummer XXX wurde am XXX von XXX entgegen genommen.
Für die Schaltung gelten die Bauteilwerte, wie sie in Tabelle (1.1) abgebildet wurden.

Tabelle 1.1: Bauteilwerte der Schaltung

Zweigwiderstände	Quellenspannungen
$R_1 = 600 \, \Omega$	$U_{q1} = 4 \, \text{V}$
$R_2 = 300 \, \Omega$	$U_{q2} = 6,35 \, \text{V}$
$R_3 = 100 \, \Omega$	$U_{q4} = 8 \, \text{V}$
$R_4 = 300 \, \Omega$	$U_{q6} = 10 \, \text{V}$
$R_5 = 100 \, \Omega$	
$R_6 = 300 \, \Omega$	
$R_7 = 100 \, \Omega$	

V 1.2: Vollständiges Gleichungssystem nach KIRCHHOFF

Das erhaltene Netzwerk wurde um Strom und Spannungszählpfeile ergänzt und in Bild (1.1) abgebildet.

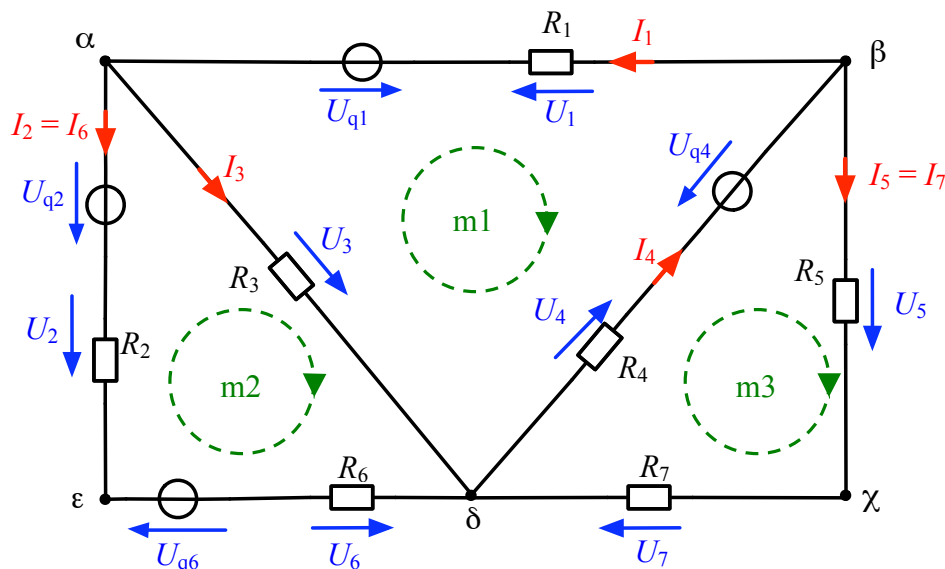


Bild 1.1: Netzwerk mit allen Strömen und Spannungen

Für das in Bild (1.1) abgebildete Netzwerk lassen sich nun Gleichungen mittels der KIRCHHOFF'schen Sätze – siehe [1] Kapitel 2.2 – herleiten.

Nach KIRCHHOFF gilt, dass in einem Knoten die Summe aller Ströme gleich Null sein muss. Daraus folgen die Gleichungen für die Ströme:

$$(\alpha): -I_2 - I_3 + I_1 = 0 \quad (1.1)$$

$$(\beta): -I_1 + I_4 - I_5 = 0 \quad (1.2)$$

$$(\delta): I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0 \quad (1.3)$$

Nach KIRCHHOFF gilt, dass in einer Masche die Summe aller Spannungen gleich Null sein muss. Daraus folgen die Gleichungen für die Spannungen:

$$(m1): -U_3 + U_{q1} - U_1 + U_{q4} - U_4 = 0 \quad (1.4)$$

$$(m2): -U_6 + U_{q6} - U_2 - U_{q2} + U_3 = 0 \quad (1.5)$$

$$(m3): U_4 - U_{q4} + U_5 + U_7 = 0 \quad (1.6)$$

2 Testnetzwerk zur Testmessung

D 2: Aufbau und Testmessung

Das Testnetzwerk wurde gemäß des Laborumdruckes [2] aufgebaut und die erforderlichen Ströme und Spannungen wurden gemessen und dokumentiert.

3 Umlaufanalyse

V 3.1: Berechnung der Zweigströme mittels der Umlaufanalyse

Für das Netzwerk in Bild (1.1) wurde der vollständige Baum gewählt, wie er in Bild (3.1) abgebildet ist. Die fett markierten Zweige kennzeichnen hier den Baumzweig. Weiterhin gelten für die Umlaufanalyse die gleichen Ströme, Spannungen und Maschen wie sie in Bild (1.1) abgebildet sind.

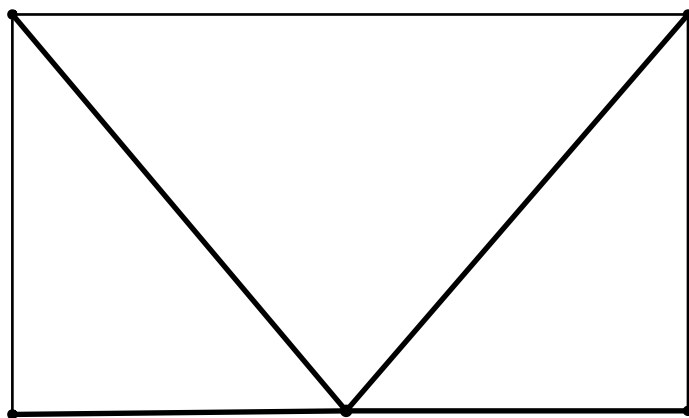


Bild 3.1: Vollständiger Baum zum Testnetzwerk

Mit Kenntnis des vollständigen Baumes und der Ströme und Spannungen lässt sich das Koeffizientenschema zur Umlaufanalyse aufstellen. Dieses Schema ist in Tabelle (3.1) dargestellt.

Tabelle 3.1: Koeffizientenschema für die Umlaufanalyse

$I_{m1} = -I_1$	$I_{m2} = -I_2$	$I_{m3} = I_5$	<i>Abs.</i>
$R_1 + R_3 + R_4$	$-R_3$	$-R_4$	$-U_{q1} - U_{q4}$
$-R_3$	$R_2 + R_3 + R_6$	0	$U_{q2} - U_{q6}$
$-R_4$	0	$R_4 + R_5 + R_7$	U_{q4}

Aus der Matrix lassen sich nun Gleichungen herleiten, um die erforderlichen Ströme zu berechnen.

$$-I_1 \cdot (R_1 + R_3 + R_4) + I_2 \cdot R_3 - I_5 \cdot R_4 = -U_{q1} - U_{q4} \quad (3.1)$$

$$I_1 \cdot R_3 - I_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_6) = U_{q2} - U_{q6} \quad (3.2)$$

$$I_1 \cdot R_4 + I_5 \cdot (R_4 + R_5 + R_7) = U_{q4} \quad (3.3)$$

Das Auflösen des Gleichungssystems ergibt die Ströme I_1 , I_2 und I_5 :

$$I_1 = \underline{\underline{9,58 \text{ mA}}}$$

$$I_2 = I_6 = \underline{\underline{6,58 \text{ mA}}}$$

$$I_5 = I_7 = \underline{\underline{10,25 \text{ mA}}}$$

Die fehlenden Ströme können mit Hilfe der Gleichungen aus Kapitel *V I.2* berechnet werden. Für I_3 gilt hier Formel (1.1), umgestellt zum Strom I_3 . Für I_4 gilt Formel (1.2), umgestellt nach I_4 .

$$I_3 = I_1 - I_2 = 9,58 \text{ mA} - 6,58 \text{ mA} = \underline{\underline{3 \text{ mA}}}$$

$$I_4 = I_5 + I_1 = 10,25 \text{ mA} + 9,58 \text{ mA} = \underline{\underline{19,83 \text{ mA}}}$$

V 3.2: Leistungsbilanz

Für die Leistungen der Quellen und Verbraucher gilt im Verbraucherzählpfeilsystem:

Verbraucherleistungen	Quellenleistungen
$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 55,1 \text{ mW}$	$P_{q1} = U_{q1} \cdot I_{q1} = -38,3 \text{ mW}$
$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 13 \text{ mW}$	$P_{q2} = U_{q2} \cdot I_{q2} = 41,8 \text{ mW}$
$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 0,9 \text{ mW}$	$P_{q4} = U_{q4} \cdot I_{q4} = -158,6 \text{ mW}$
$P_4 = I_4^2 \cdot R_4 = 117,9 \text{ mW}$	$P_{q6} = U_{q6} \cdot I_{q6} = -65,8 \text{ mW}$
$P_5 = I_5^2 \cdot R_5 = 10,5 \text{ mW}$	
$P_6 = I_6^2 \cdot R_6 = 13 \text{ mW}$	
$P_7 = I_7^2 \cdot R_7 = 10,5 \text{ mW}$	

$$\sum P_v + P_Q = 220,9 \text{ mW} + (-220,9 \text{ mW}) = 0$$

D 3: Messung der einzelnen Zweigströme

Die einzelnen Zweigströme wurden aufgenommen und in Tabelle (3.2) dokumentiert. Die Spannungsquellen wurden nachgeregelt, wenn es erforderlich war.

A 3: Gegenüberstellung der Ergebnisse und Diskussion der Abweichungen

Tabelle 3.2: Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten Zweigströme

Zweigstrom	Berechneter Wert in mA	Gemessener Wert in mA
I_1	9,58	
I_2	6,58	
I_3	3	
I_4	19,83	
I_5	10,25	
I_6	6,58	
I_7	10,25	

Diskussion eventueller Abweichungen:

4 Knotenanalyse

V 4: Berechnung aller Knotenpotentiale

Für die Analyse gelten alle Ströme und Spannungen wie sie in Bild (1.1) zu sehen sind. Der Knoten δ wurden hier als Bezugsknoten definiert. Zu beachten ist, dass die Knoten ε und χ in dem Schema entfallen, da dies lediglich virtuelle Knoten sind, siehe [1] Kapitel 5.5.2. Das Koeffizientenschema für die Knotenanalyse ist in Tabelle (4.1) abgebildet.

Tabelle 4.1: Koeffizientenschema für die Knotenanalyse

φ_α	φ_β	Abs.
$\frac{1}{R_2 + R_6} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1}$	$-\frac{1}{R_1}$	$\frac{U_{q1}}{R_1} + \frac{U_{q2} - U_{q6}}{R_2 + R_6}$
$-\frac{1}{R_1}$	$\frac{1}{R_5 + R_7} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1}$	$\frac{U_{q4}}{R_4} - \frac{U_{q1}}{R_1}$

Aus der Matrix lassen sich die erforderlichen Gleichungen herleiten, um die Potentiale zu berechnen:

$$\varphi_\alpha \cdot \left(\frac{1}{R_2 + R_6} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} \right) - \varphi_\beta \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{U_{q1}}{R_1} + \frac{U_{q2} - U_{q6}}{R_2 + R_6} \quad (4.1)$$

$$-\varphi_\alpha \cdot \frac{1}{R_1} + \varphi_\beta \cdot \left(\frac{1}{R_5 + R_7} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{U_{q4}}{R_4} - \frac{U_{q1}}{R_1} \quad (4.2)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt die benötigten Potentiale:

$$\varphi_\alpha = \underline{\underline{0,3 \text{ V}}}$$

$$\varphi_\beta = \underline{\underline{2,05 \text{ V}}}$$

Um das Potential des Knotens χ bestimmen zu können, muss vorher der Strom I_5 berechnet werden:

$$I_5 = I_7 = \frac{\varphi_\beta - \varphi_\delta}{R_5 + R_7} = 10,25 \text{ mA} \quad (4.3)$$

Mit dem in Formel (4.3) berechneten Strom, lässt sich nun das geforderte Potential berechnen:

$$\varphi_{\chi} = \varphi_{\beta} - I_5 \cdot R_5 = \underline{\underline{1,025 \text{ V}}} \quad (4.4)$$

Um das Potential des Knotens ε bestimmen zu können, muss vorher der Strom I_6 berechnet werden:

$$I_2 = I_6 = \frac{\varphi_{\alpha} - \varphi_{\delta} - (U_{q2} - U_{q6})}{R_2 + R_6} = 6,58 \text{ mA} \quad (4.5)$$

Mit dem in Formel (4.5) berechneten Strom, lässt sich nun das geforderte Potential berechnen:

$$\varphi_{\varepsilon} = I_6 \cdot R_6 - U_{q6} = \underline{\underline{-8,025 \text{ V}}} \quad (4.6)$$

Die restlichen Ströme in den Zweigen berechnen sich wie folgt:

$$I_1 = \frac{\varphi_{\beta} - (\varphi_{\alpha} - U_{q1})}{R_1} = 9,58 \text{ mA} \quad (4.7)$$

$$I_3 = \frac{\varphi_{\alpha} - \varphi_{\delta}}{R_3} = 3 \text{ mA} \quad (4.8)$$

$$I_4 = \frac{\varphi_{\delta} - (\varphi_{\beta} - U_{q4})}{R_4} = 19,83 \text{ mA} \quad (4.9)$$

D 4: Messung der berechneten Knotenpotentiale

Die Knotenpotentiale wurden gemäß des Laborumdruckes [2] gemessen und in Tabelle (4.2) dokumentiert.

A 4: Gegenüberstellung der Ergebnisse und Diskussion der Abweichungen

Tabelle 4.2: Gegenüberstellung der berechneten und gemessenen Knotenpotentiale

Knotenpotential	Berechneter Wert in V	Gemessener Wert in V
φ_{α}	0,3	
φ_{β}	2,05	
φ_{χ}	1,025	
φ_{ε}	-8,025	

Diskussion eventueller Abweichungen:

5 Überlagerungssatz nach HELMHOLTZ

V 5: Berechnung der Quellenbeiträge zu dem Zweigstrom

Für die Berechnungen nach dem Überlagerungssatz wurde der Strom I_2 gewählt, da hier keine Stern-Dreieck-Transformationen notwendig waren.

Es ergibt sich nach dem HELMHOLTZ'schen Überlagerungssatz die Überlagerung der Quellen wie folgt:

$$I_2 = I_{2q1} - I_{2q2} + I_{2q4} + I_{2q6} \quad (5.1)$$

Die einzelnen Quellenbeiträge berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} I_{2q1} &= \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_6} \cdot \frac{U_{q1}}{R_1 + [R_3 \parallel (R_2 + R_6)] + [R_4 \parallel (R_5 + R_7)]} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \frac{4 \text{ V}}{806 \Omega} = 0,71 \text{ mA} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$I_{2q2} = \frac{U_{q2}}{R_2 + R_6 + R_3 \parallel [R_1 + R_4 \parallel (R_5 + R_7)]} = \frac{6,35 \text{ V}}{688 \Omega} = 9,23 \text{ mA} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} I_{2q4} &= \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_6} \cdot \frac{R_5 + R_7}{R_1 + R_5 + R_7 + R_3 \parallel (R_2 + R_6)} \cdot \frac{U_{q4}}{R_4 + (R_5 + R_7) \parallel [R_1 + R_3 \parallel (R_2 + R_6)]} \\ &= \frac{8 \text{ V}}{455 \Omega} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{31} = 0,567 \text{ mA} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$I_{2q6} = \frac{U_{q6}}{R_2 + R_6 + R_3 \parallel [R_1 + R_4 \parallel (R_5 + R_7)]} = \frac{10 \text{ V}}{688 \Omega} = 14,54 \text{ mA} \quad (5.5)$$

Einsetzen der berechneten Teilströme in die Formel (5.1) ergibt den gesuchten Strom I_2 :

$$I_2 = I_{2q1} - I_{2q2} + I_{2q4} + I_{2q6} = 0,71 \text{ mA} - 9,23 \text{ mA} + 0,57 \text{ mA} + 14,54 \text{ mA} = \underline{\underline{6,5 \text{ mA}}}$$

D 5: Messung der Quellenbeiträge

Die Quellenbeiträge zum Strom I_2 wurden gemessen und in Tabelle (5.1) dokumentiert.

A 5: Gegenüberstellung der Ergebnisse und Diskussion der Abweichungen

Tabelle 5.1: Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten Quellenbeiträge

Quellenbeiträge	Berechneter Wert in mA	Gemessener Wert in mA
I_{2q1}	0,71	
I_{2q2}	9,23	
I_{2q4}	0,576	
I_{2q6}	14,54	

Diskussion eventueller Abweichungen:

6 Zweipoltheorie – Messtechnische Beschreibung von Trennstellen

V 6: Bestimmung von Leerlaufspannung, Kurzschlussstrom und Innenwiderstand

Für die Trennstelle wurde der Widerstand R_7 ausgewählt. Daher gilt für weitere Berechnungen:

$$R_a = R_7 = 100 \, \Omega \quad (6.1)$$

Der Innenwiderstand R_i , der sich ergebenden Anordnung, ergibt sich folgender Maßen:

$$R_i = R_5 + R_4 \parallel [R_1 + R_3 \parallel (R_2 + R_6)] = \underline{\underline{309 \, \Omega}} \quad (6.2)$$

Der Kurzschlussstrom kann über den HELMHOLTZ'schen Überlagerungssatz berechnet werden. Für die einzelnen Quellenbeiträge zum Kurzschlussstrom gilt:

$$I_K = -I_{Kq1} + I_{Kq2} + I_{Kq4} - I_{Kq6} \quad (6.3)$$

Die Einzelbeiträge der Quellen berechnen sich wie folgt:

$$I_{Kq1} = \frac{R_4}{R_4 + R_5} \cdot \frac{U_{q1}}{R_1 + [R_3 \parallel (R_2 + R_6)] + R_4 \parallel R_5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4 \, \text{V}}{761 \, \Omega} = 3,94 \, \text{mA} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} I_{Kq2} &= \frac{R_4}{R_4 + R_5} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_1 + R_4 \parallel R_5} \cdot \frac{U_{q2}}{R_2 + R_6 + R_3 \parallel [R_1 + R_4 \parallel R_5]} \\ &= \frac{6,35 \, \text{V}}{687 \, \Omega} \cdot \frac{3}{31} = 0,895 \, \text{mA} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} I_{Kq4} &= \frac{R_1 + R_3 \parallel (R_2 + R_6)}{R_5 + R_1 + R_3 \parallel (R_2 + R_6)} \cdot \frac{U_{q4}}{R_4 + R_5 \parallel [R_1 + R_3 \parallel (R_2 + R_6)]} \\ &= \frac{8 \, \text{V}}{387 \, \Omega} \cdot \frac{48}{55} = 18,03 \, \text{mA} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} I_{Kq6} &= \frac{U_{q6}}{R_2 + R_6 + R_3 \parallel [R_1 + R_4 \parallel R_5]} \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_5} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_1 + R_4 \parallel R_5} \\ &= \frac{10 \, \text{V}}{687 \, \Omega} \cdot \frac{3}{31} = 1,41 \, \text{mA} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Mit Hilfe der berechneten Teilströme und den einzelnen Quellenbeiträgen, in Formel (6.2), kann nun der gesamt Kurzschlussstrom berechnet werden:

$$I_K = -I_{Kq1} + I_{Kq2} + I_{Kq4} - I_{Kq6} = -3,94 \, \text{mA} + 0,895 \, \text{mA} + 18,03 \, \text{mA} - 1,41 \, \text{mA} = \underline{\underline{13,58 \, \text{mA}}}$$

Mit Hilfe des Kurzschlussstromes wird der Strom I_7 im Lastwiderstand berechnet. Dies geschieht mit Hilfe der Stromteilerregeln, da hier eine Stromquellenersatzschaltung vorliegt. Es gilt für den Strom I_7 :

$$I_7 = I_K \cdot \frac{R_i}{R_i + R_a} = 13,58 \text{ mA} \cdot \frac{309 \Omega}{309 \Omega + 100 \Omega} = \underline{\underline{10,26 \text{ mA}}} \quad (6.8)$$

Unter Zuhilfenahme des Kurzschlussstromes und des Innenwiderstandes ergibt sich die Leerlaufspannung der Spannungsquellenersatzschaltung wie folgt:

$$U_L = R_i \cdot I_K = 309 \Omega \cdot 13,58 \text{ mA} = \underline{\underline{4,2 \text{ V}}} \quad (6.9)$$

Für die Spannung am Lastwiderstand gilt dann:

$$U_a = U_L \cdot \frac{R_a}{R_a + R_i} = 4,2 \text{ V} \cdot \frac{100 \Omega}{100 \Omega + 309 \Omega} = \underline{\underline{1,027 \text{ V}}} \quad (6.10)$$

D 6: Vorbereitung des Netzwerkes

Die Widerstand R_7 wurde auf Null gestellt.

D 6.1: Messung des Innenwiderstandes

Die Spannungsquellen wurden durch einen Kurzschluss ersetzt. Anschließend wurde der Innenwiderstand R_i gemessen und in Tabelle (6.1) dokumentiert.

D 6.2: Messung der Leerlaufspannung und des Kurzschlussstromes

Die Spannungsquellen wurden wieder aktiv geschaltet. Danach wurden die Leerlaufspannung U_L und der Kurzschlussstrom I_K gemessen und in Tabelle (6.1) dokumentiert.

D 6.3: Messung des Laststromes

Der Lastwiderstand wurde mittels WLD 30-___ an die Trennstelle geschaltet und der Strom I_7 durch den Lastwiderstand wurde gemessen und in Tabelle (6.1) eingetragen.

A 6: Gegenüberstellung der Ergebnisse und Diskussion der Abweichungen

Tabelle 6.1: Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten Quellenbeiträge

Quellenbeiträge	Berechneter Wert	Gemessener Wert
I_K	13,58 mA	
U_L	4,2 V	
R_i	309 Ω	
I_7	10,26 mA	

Diskussion eventueller Abweichungen:

7 Geräteliste

Nr.	Bezeichnung	Verwendet als
1	Vielfachmessgerät	Messgerät
2	Vielfachmessgerät	Messgerät
3	Vielfachmessgerät	Messgerät
4	Digitalmultimeter	Messgerät
5	Digitalmultimeter	Messgerät
6	Digitalmultimeter	Messgerät
7	Trenntransformator	Spannungsquelle
8	Widerstandslastdekade	R_a
9	Digitalmultimeter	Messgerät
10	Netzwerk	Netzwerk