technische universität
dortmund

# Klausur WS2007/08

## erster Termin

*MUSTERLÖSUNG*




**Sebastian Šubik**

**Erstellt am : 16. Januar 2009**

# 1 Kurzfragen:

*Punkte für die Aufgabe: 21*

a) Ein Ingenieur bekommt die Aufgabe in einer Schaltung ein empfindliches Bauteil unterzubringen, an welches eine Eingangsspannung von maximal 10 V angelegt werden darf. Die Spannungsquelle der Schaltung liefert jedoch nur eine Spannung von 20 V. Ihre Aufgabe ist es, dem Ingenieur mit einer Schaltung, die nur aus Widerständen besteht, auszuhelfen.

1. Wie heißt die Schaltung, die Sie dem Ingenieur vorschlagen würden, damit er die zu große Spannung verringern kann?

   *Spannungsteiler* (1)

2. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der von Ihnen vorgeschlagenen Schaltung.

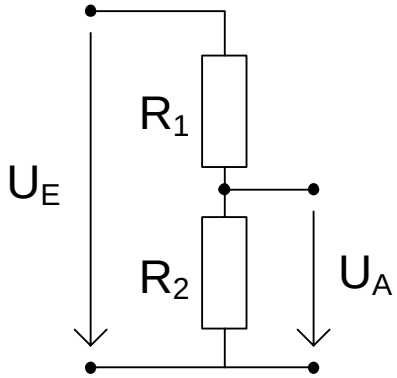



**Abbildung 1:** Spannungsteiler

(1)

3. Welches Verhältnis müssen die von Ihnen gewählten Widerstände aufweisen, damit das empfindliche Bauteil nicht zerstört wird?

   $U_E = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot U_A$
   $10V = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot 20V$
   $R_1 + R_2 = 2R_2$
   $R_1 = R_2$ (2)

b) Die Punkte A bis F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks (vgl. Abb. 2) mit der Kantenlänge $l$ und liegen in einem homogenen elektrischen Feld der Feldstärke $\vec{E}$.
Hinweis: Innenwinkel n-Eck: $\alpha = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$

1. AB
2. AC
3. AD
4. AE
5. AF

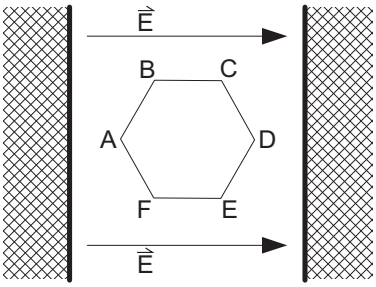



**Abbildung 2:** Elektrisches Feld

| $\alpha$ | $cos\ \alpha$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 30 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| 45 | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| 60 | $\frac{1}{2}$ |
| 90 | 0 |

**Tabelle 1:** Hinweis

Welche Spannung besteht zwischen

*1.* $AB = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \vec{E}$
*2.* $AC = \frac{3}{2} \cdot l \cdot \vec{E}$
*3.* $AD = 2 \cdot l \cdot \vec{E}$
*4.* $AE = \frac{3}{2} \cdot l \cdot \vec{E}$
*5.* $AF = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \vec{E}$

2 ½

c) Auf der Suche nach einer neuen Geschäftsidee hören Sie vom Strommarkt. Sie erfahren, dass der Strompreis von der Auslastung der Kraftwerke abhängt. Ihnen fällt ein, dass Sie ein Messgerät bauen könnten, welches Sie unter eine Leitung, die von einem Kraftwerk wegführt, platzieren, um so die Auslastung messen zu können.

1. Was würden Sie messen?

   *Lorentzkraft* 1

2. Geben Sie die Gleichung an, die Sie für die Interpretation der Messung benötigen.

   $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}x\vec{B})$ 1

d) Gegeben ist das in Abbildung 4 gezeigte Zeigerdiagramm.

1. Geben Sie qualitativ die dazugehörige Schaltung an.

   3

e) Zwei Vierpole werden an ihren Eingängen parallel und an ihren Ausgängen in Reihe geschaltet.

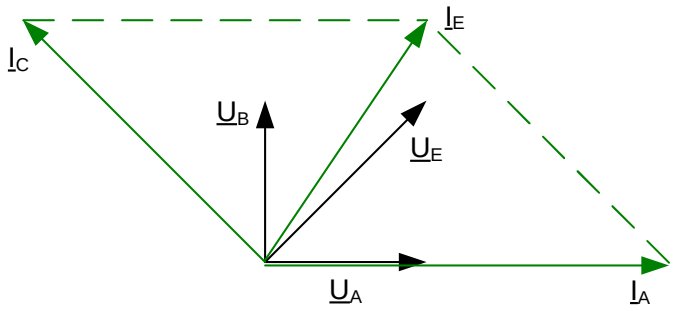



**Abbildung 3:** Zeigerdiagramm

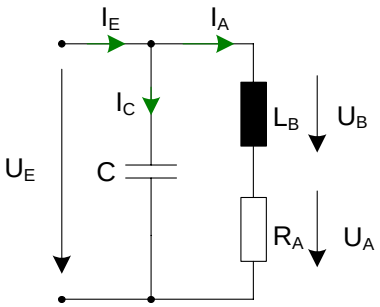



**Abbildung 4:** Lösung: Schaltung zum Zeigerdiagramm

1. Wie heißt die Form der Vierpolgleichungen, die sich zur Berechnung anbietet?

   *Inverse Hybridschaltung* (1)

2. Geben Sie die mathematischen Gleichungen dieser Vierpolart an.

   $P_{ges} = P_1 + P_2$

   $H'_{ges} = H'_1 + H'_2$ (2)

f) Zeichnen Sie, falls möglich, die folgenden Felder qualitativ.

1. Zeichnen Sie das Elektrische Feld einer Elementarladung.

   *Lösung siehe Abbildung 5.* (1)

2. Zeichnen Sie das Magnetische Feld eines Elementarmagneten.

   *Magnetfelder sind Wirbelfelder und keine Quellenfelder. Ein isolierter magnetischer Monopol wird zwar hypothetisch untersucht, ist bis jetzt jedoch noch nicht in der Natur beobachtet worden.* (1)

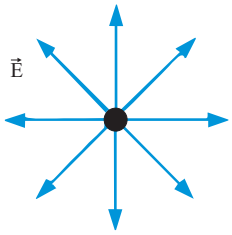



**Abbildung 5:** Elektrisches Feld einer Elementarladung

g) Mit Hilfe von Messgeräten sollen der Stromfluss und die Spannung am ohmschen Verbraucher $R_a$ aus Abbildung 6 bestimmt werden. Allerdings ist die Messung des Amperemeters nicht korrekt, da sowohl das Voltmeter als auch das Amperemeter einen endlichen Innenwiderstand $R_{VI}$ bzw. $R_{AI}$ besitzen. Die Spannungsquelle soll als reale Spannungsquelle behandelt werden.

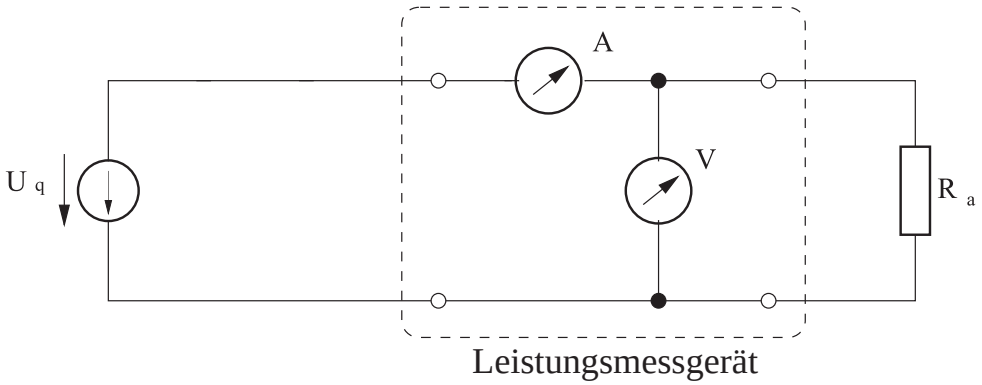



**Abbildung 6:** Messaufbau

1. Skizzieren Sie den erweiterten Messaufbau mit allen benötigten Widerständen. Was ist der Unterschied zwischen einer idealen und einer realen Spannungsquelle?

   3

2. Wie groß ist der Gesamtwiderstand dieser Schaltung? Beziehen Sie hierbei den Widerstand $R_a$, die Innenwiderstände $R_{VI}$ und $R_{AI}$ sowie den Innenwiderstand $R_{QI}$ mit in die Rechnung ein.

   $R_{ges} = R_{QI} + R_{AI} + \frac{R_{VI} \cdot R_a}{R_{VI} + R_a}$ 1 ½

3. Die Widerstände haben folgende Größen: $R_{VI} = 10\Omega$, $R_a = 13\Omega$, $R_{AI} = 30\Omega$ und $R_{QI} = 100\Omega$. Es wird eine Spannung von $U = 23V$ angelegt. Wie groß ist die Leistungsaufnahme der gesamten Schaltung?

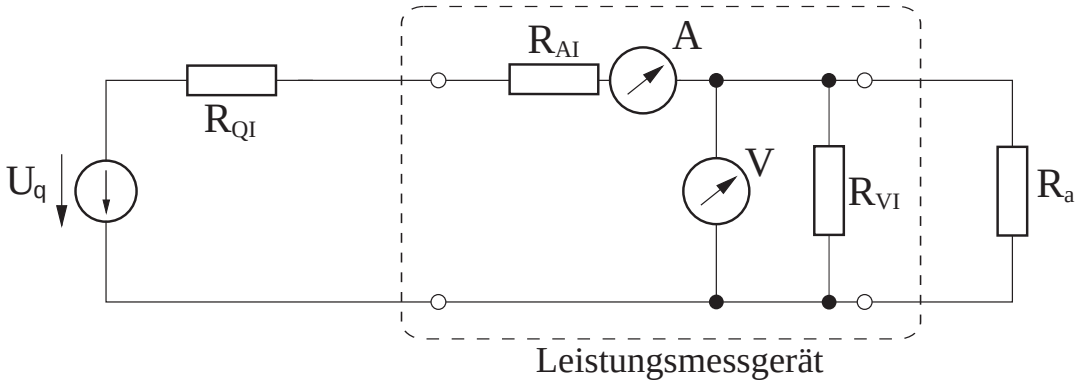



**Abbildung 7:** Lösung erweiterter Messaufbau

$$P = U^2 * \frac{1}{R_{ges}}$$
$$P = (23V)^2 * \frac{R_{VI}+R_a}{R_{QI}\cdot(R_{VI}+R_a)+R_{AI}\cdot(R_{VI}+R_a)+R_{VI}\cdot R_a}$$
$$P = 3{,}9W \quad (1)$$

---

*Summe: 21 Punkte*

# 2 Knotenpotentialanalyse

*Punkte für die Aufgabe: 16*

Gegeben sei die in Abbildung 8 abgebildete Schaltung im eingeschwungenen Zustand, welche mit Hilfe der Knotenpotentialanalyse zu untersuchen ist. Ziel ist es, die Spannung am Kondensator $C_3$ zu bestimmen.

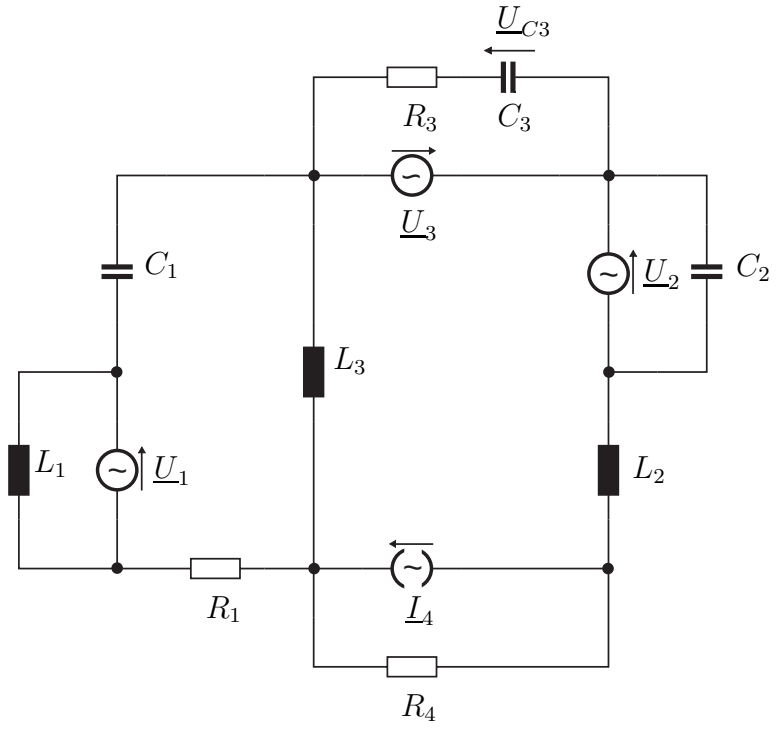



**Abbildung 8:** Knotenpotentialanalyse

a) Beschreiben Sie, wie Sie die Schaltung aus Abbildung 8 möglichst weit vereinfachen können. Fassen Sie passive Bauteile geeignet zusammen und entfernen Sie ggf. wirkungslose Elemente.

*In der Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Knotenpotenialanalyse beherrscht wird.*

*Widerstände parallel zu Spannungsquellen und Widerstände in Reihe zu Stromquellen können entfallen*

$\Rightarrow$ $L_1$ *und* $C_2$ *knnenentfallen.* (1)

***Achtung**: Die Serienschaltung aus $R_3$ und $C_3$ darf nicht entfallen, da die Spannung $\underline{U_{C3}}$ berechnet werden soll.*

*Folgende Bauelemente können zusammengefasst werden*

$$\underline{Z_1} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1}$$

1

b) Wandeln Sie die Quellen der Schaltung so um, dass eine Knotenpotentialanalyse durchgeführt werden kann.
Zeichnen Sie das neue Ersatzschaltbild (mit den Vereinfachungen aus Aufgabenteil a)).
*Hinweis: Hierfür kann es von Vorteil sein, die Quellen vorher zu verschieben.*

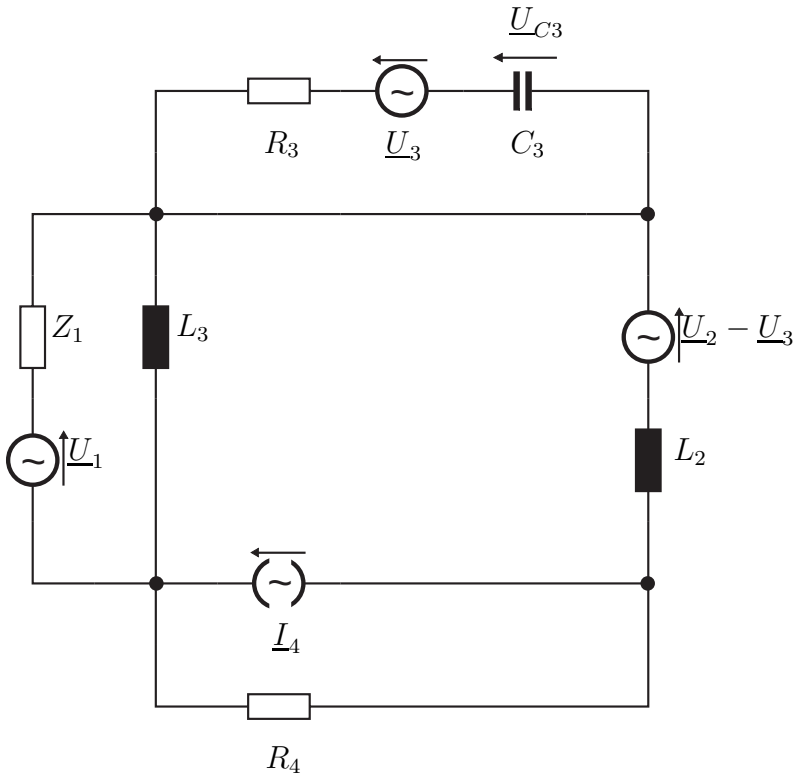



**Abbildung 9:** Teillösung zu b muss NICHT gezeichnet werden

*Lösung: Verschieben der Spannungsquellen über den rechts davon liegenden Knoten hinaus führt zu Darstellung gemäß 9.*

*Umwandeln der Spannungsquellen in Stromquellen:*

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \quad (1/2)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_3}{j\omega L_2} \quad (1/2)$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_3}{R_3} \quad (1/2)$$

*Nach der Umwandlung muss Schaltung 10 aufgezeichnet werden.* (1/2) (1)

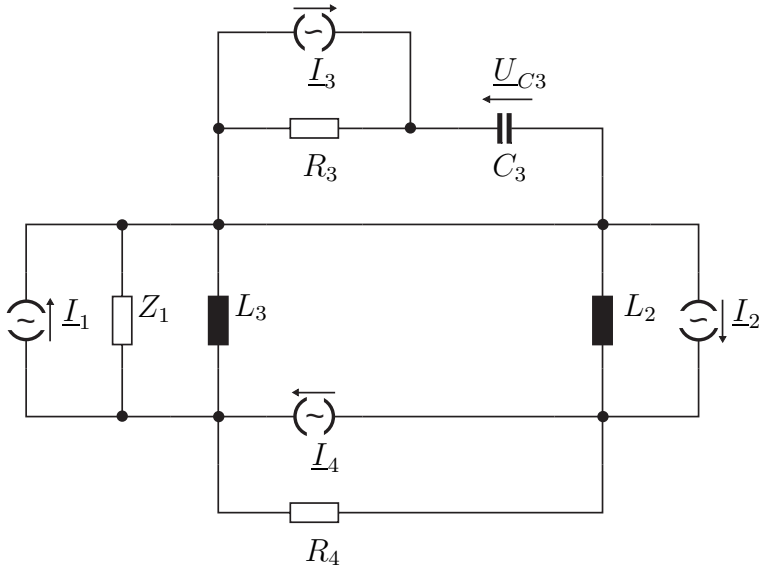



**Abbildung 10:** Lösung zu b, MUSS gezeichnet werden.

Sollten Sie in den Aufgaben a) und b) keine sinnvollen Ergebnisse erzielt haben, können Sie für die weiteren Berechnungen das Ersatzschaltbild aus Abbildung 11 als Grundlage nutzen.

c) Nummerieren Sie die Knoten und wählen Sie den Bezugsknoten derart, dass die Spannung am Kondensator $C_3$ direkt durch ein Knotenpotential ausgedrückt werden kann.

*Lösung: Als Bezugsknoten wird der Knoten* 0 *gewählt! Lösung in Abbildung 12*

(1)

*Zur Vereinfachung werden die Widerstände als Leitwerte ausgedrückt:*

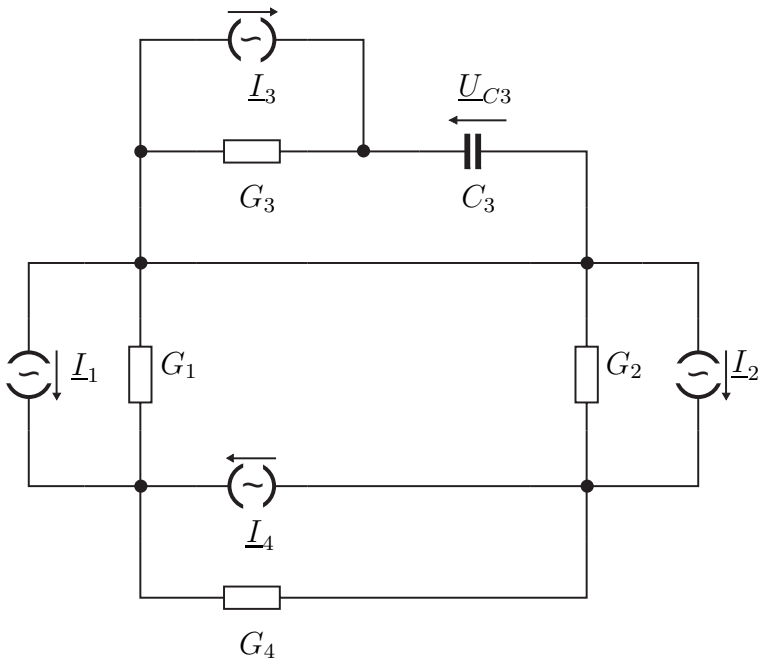



**Abbildung 11:** Alternatives Schaltbild ab Teil c)

$$\underline{G}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{j\omega L_3}$$
$$\underline{G}_2 = \frac{1}{j\omega L_2} \quad (1)$$
$$G_3 = \frac{1}{R_3}$$
$$G_4 = \frac{1}{R_4} \quad (1)$$

*Die Spannung über den Kondensator $C3$ kann direkt mit dem Knotenpotential $\phi_3$ ausgedrückt werden.*

d) Stellen Sie die Knotengleichungen auf.

*Lösung: Die Kontengleichungen lauten:*

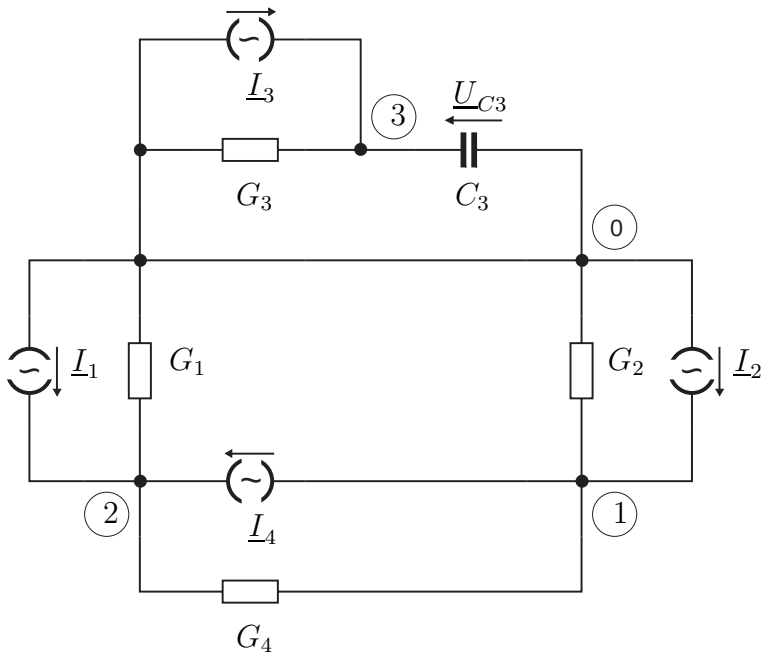



**Abbildung 12:** Lösung Aufgabenteil c

$$K1: (\varphi_0 - \varphi_1)\, \underline{G}_2 + (\varphi_2 - \varphi_1)\, G_4 + \underline{I}_2 - \underline{I}_4 = 0$$
$$K2: (\varphi_1 - \varphi_2)\, G_4 + (\varphi_0 - \varphi_2)\, \underline{G}_1 + \underline{I}_1 + \underline{I}_4 = 0$$
$$K3: (\varphi_0 - \varphi_3)\, (j\omega C_3 + G_3) + \underline{I}_3 = 0$$

*Mit Knoten '0' als Bezugsknoten ($\varphi_0 = 0$) ergibt sich nach Umstellung der Gleichungen*

$$K1: \varphi_1\, (\underline{G}_2 + G_4) - \varphi_2\, G_4 = \underline{I}_2 - \underline{I}_4$$
$$K2: -\varphi_1\, G_4 + \varphi_2\, (\underline{G}_1 + G_4) = \underline{I}_1 + \underline{I}_4$$
$$K3: \varphi_3\, (j\omega C_3 + G_3) = \underline{I}_3$$

2

e) Geben Sie die Knotengleichungen als Matrizengleichung an. Wie lautet die Gleichung für das Knotenpotential, welches der Spannung $\underline{U}_{C3}$ entspricht?

*Punkte: X*

*Lösung: Schreibweise in Matrixform:*

$$\begin{pmatrix} \underline{G}_2 + G_4 & -G_4 & 0 \\ -G_4 & \underline{G}_1 + G_4 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C_3 + G_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_2 - \underline{I}_4 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_4 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}$$

(2) *Damit ergibt sich:*

$$\varphi_3 = \underline{I}_3 \, \frac{1}{j\omega C_3 + G_3} = \underline{I}_3 \, \frac{1}{j\omega C_3 + \frac{1}{R_3}} = \underline{I}_3 \, \frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C_3}$$

(1)

f) Bestimmen Sie die Spannung am Kondensator $C_3$ für den Fall, dass alle Quellen sinusförmige Wechselgrößen sind.

*Punkte: X*

*Lösung: Die Spannung am Kondensator lässt sich über die Rechenvorschrift des unbelasteten Spannungsteilers bestimmen:*

$$\begin{aligned} \underline{U}_{C3} = & \quad -\underline{U}_3 \, \frac{1/j\omega C_3}{R_3 + 1/j\omega C_3} \\ = & \quad -\underline{U}_3 \, \frac{1}{1 + j\omega R_3 C_3} \end{aligned}$$

(2) Mit $\underline{U}_3 = \underline{I}_3 \, R_3$ ergibt sich wieder

$$\underline{U}_{C3} = -\underline{I}_3 \, \frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C_3} = -\varphi_3$$

(1)

g) Begründen Sie, warum sich für die in Abbildung 8 gezeigte Schaltung eine Knotenpotentialanalyse angeboten hat und eine Maschenstromanalyse „ungünstig“ bzw. aufwändiger gewesen wäre.

*Besser ist das* (1)

---

*Summe: 16 Punkte*

# 3 Zeigerdiagramm

*Punkte für die Aufgabe: 15*

Die folgende Schaltung soll mit Hilfe eines Zeigerdiagramms analysiert werden. Nutzen Sie zur Anfertigung des Zeigerdiagramms das beigefügte Hilfsblatt!

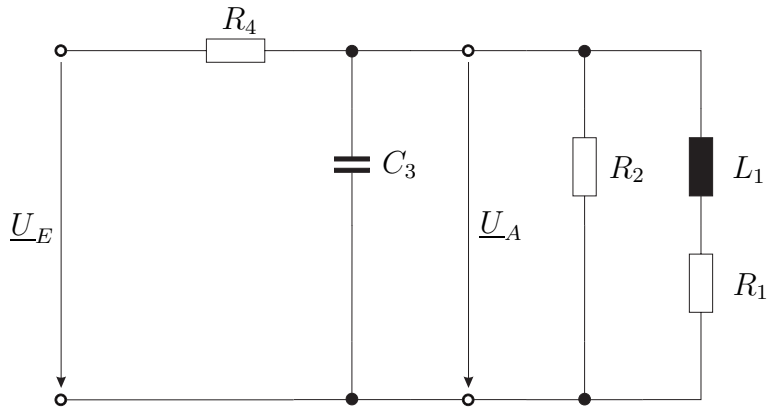



**Abbildung 13:** Schaltung zum Zeigerdiagramm

Die Werte der einzelnen Bauelemente sind:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | = | $20\mu H$ | $C_3$ | = | $25pF$ | f | = | $15{,}92MHz$ |
| $R_1$ | = | $1{,}25k\Omega$ | $R_4$ | = | $500\Omega$ | | | |
| $R_2$ | = | $800\Omega$ | $\lvert\underline{U}_{R1}\rvert$ | = | 2V | | | |

Als Maßstab sei festgelegt (s. Hilfsblatt):

$$1V \;\widehat{=}\; 1cm$$
$$1mA \;\widehat{=}\; 1cm$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Zeigerdiagramms die Eingangsspannung $\underline{U}_E$. Beschreiben Sie jeden Ihrer Schritte in Stichpunkten.

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 15{,}92MHz = 100MHz$ (1)

$I_1 = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{2{,}0V}{1{,}25k\Omega} = 1{,}6mA$ (½)

$U_{L1} = \omega L \cdot I_1 = 100MHz \cdot 20\mu H \cdot 1{,}6mA = 3{,}2V$ (½)

$U_{R2}$ vektorielle Addition aus $U_{R1}$ und $U_{L1} \rightarrow$ Messen: $U_{R2} = 3{,}7V = U_{C3} = U_A$ (½)

$I_2 = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{3{,}7V}{800\Omega} = 4{,}625mA$ (½)

$I_3 = \omega C \cdot U_{R2} = 100MHz \cdot 25pF \cdot 3{,}7V = 9{,}25mA$ ½

$I_4$ *vektorielle Addition aus* $I_1$, $I_2$ *und* $I_3 \rightarrow$ *Messen:* $I_4 = 9{,}65mA$ ½

$U_{R4} = 9{,}65mA \cdot 500\Omega = 4{,}9V$ ½

$U_E$ *vektorielle Addition aus* $U_{R4}$ *und* $U_A \rightarrow$ *Messen:* $U_E = 7{,}6V$ ½

*Pro Zeiger (8x) im Zeigerdiagram* ½

b) Hat die Schaltung am Eingang kapazitives oder induktives Verhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Da* $I_4$ *vor* $U_E$*, hat die Schaltung kapazitives Verhalten.* 1

c) Passen Sie die Kapazität $C_3$ so an, dass $U_E$ and $U_A$ in Phase sind. Geben Sie den neuen Wert für die Kapazität $C_3$ an und erläutern Sie stichpunktartig Ihre Vorgehensweise.

$U_E$ *ergibt sich aus der vektoriellen Addition von* $U_{R4}$ *und* $U_{C3}$ *bzw.* $U_A$*. Durch Variation der Kapazität* $C_3$ *kann der Phasenversatz zwischen* $U_{R4}$ *und* $U_{C3}$ *eingestellt werden. Durch Verringerung des Stroms durch* $C_3$ *auf ca. 1,32mA verschwindet der Phasenunterschied zwischen* $U_E$ *und* $U_A$*.* 2

$C_3 = \frac{I_3}{U_{R2} \cdot \omega} = \frac{1{,}32mA}{3{,}7V \cdot 100MHz} = 3{,}57pF$ 1

d) Was für ein Verhalten zeigt die Schaltung nun am Eingang (nach den Anpassungen aus Aufgabenteil c)? Begründen Sie Ihre Antwort.

$I_4$ *und* $U_E$ *liegen nun in Phase. Da sich am Eingang jetzt alle induktiven und kapazitiven Anteile aufheben, hat die Schaltung ein rein ohmsches Verhalten.* 1

---

*Summe: 15 Punkte*

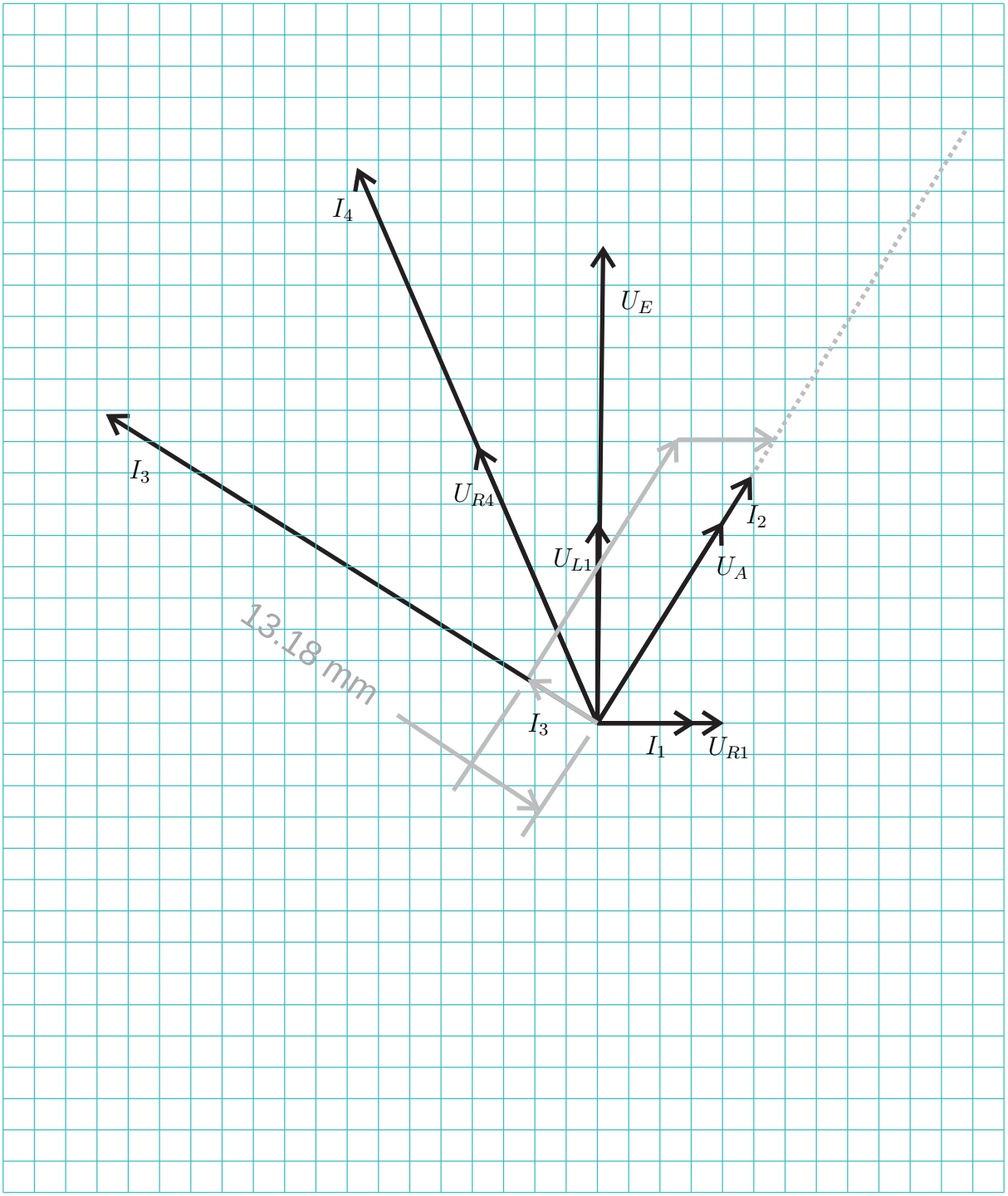



**Abbildung 14:** Lösung zum Zeigerdiagramm Aufg. a)

# 4 Magnetfeld

*Punkte für die Aufgabe: 16*

Gegeben sei die in Abbildung 15 dargestellte Anordnung. Die Leiterschleife $L_1$ sei von einem konstanten, homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0$ durchsetzt, das aus der Zeichenebene heraus tritt. An der Position $x_0$ befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ zwei Stäbe, von denen einer für $t > 0$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in Richtung $-\vec{e}_x$ bewegt wird.

*Hinweis: Für die Berechnungen soll $\mu = \mu_0$ angenommen werden.*

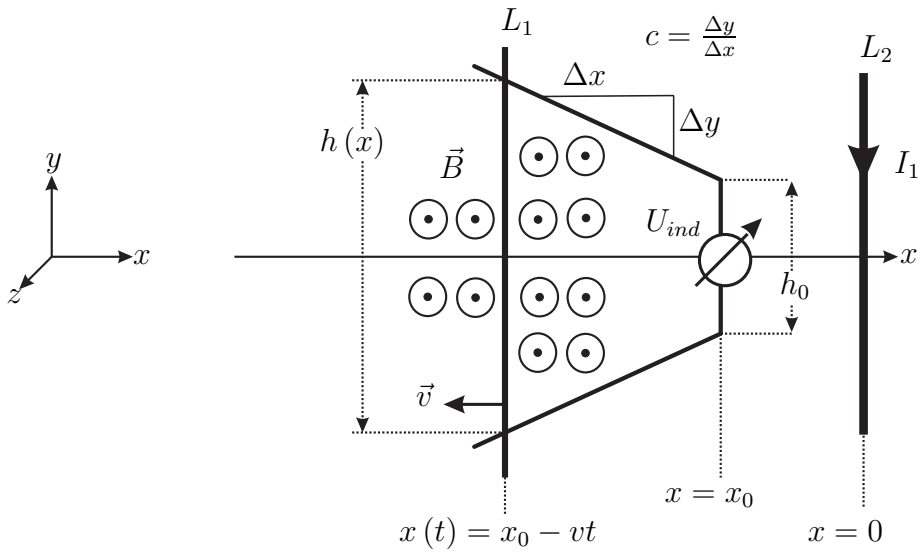



**Abbildung 15:** Leiterschleife im Magnetfeld

a) Nennen Sie allgemein die Beziehung zur Berechnung der induzierten Spannung.

*Es gilt allgemein*

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1/2) \quad = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}d\vec{A} \quad (1/2)$$

b) Bestimmen Sie die Gleichung für die Gesamthöhe $h(x)$.

$$h(x) = h_0 + 2c(x - x_0) \quad (2)$$

c) Beschreiben Sie die Funktion der magnetischen Feldstärke $\vec{H}(t)$.

*$\vec{B}$ ist nicht abhängig von t!* (1)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left|\vec{B}_0\right| \cdot (-\vec{e}_z) = const \quad (1)$$

d) Leiten Sie jetzt die Beziehung für $U_{ind}$ her, indem Sie $U_{ind}$ für die hier geltenden Rahmenbedingungen beschreiben und die Fläche in Abhängigkeit von $t \geq 0$ angeben.

*Da $\vec{B}_0$ senkrecht auf der Leiterschleife steht und homogen ist* (1) *, lässt sich einfach*

$$\begin{aligned} U_{ind}(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\iint\limits_A \vec{B}d\vec{A} \\ &= -\left|\vec{B}\right|(-\vec{e}_z)\frac{d}{dt}\iint\limits_A \vec{e}_z dA \\ &= \left|\vec{B}\right|\frac{d}{dt}\iint\limits_A dA \\ &= B_0\frac{d}{dt}A \quad \textit{schreiben.} \quad (2) \quad (\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

*Für $t > 0$ gilt weiter*

$$\begin{aligned} A &= h_0(x - x_0) + \frac{2c(x - x_0)^2}{2} \quad (\tfrac{1}{2}) \\ &= h_0 vt + c(vt)^2 \quad (\tfrac{1}{2}) \quad \textit{und weiter} \\ \frac{dA}{dt} &= h_0 v + 2cv^2 t \quad (1) \end{aligned}$$

*Damit gilt schließlich*

$$U_{ind}(t) = -B_0\left(h_0 v + 2cv^2 t\right) \quad (1).$$

Nun fließe ein Gleichstrom $I_1$ durch den Leiter $L_2$ auf der Y–Achse in negative Y–Richtung. Das konstante Magnetfeld $\vec{B}_0$ wirke nicht mehr.

e) Bestimmen Sie zunächst das Magnetfeld $\vec{B}(x)$ für $x < 0$
*Hinweis: Es müssen die Richtung und der Betrag angegeben werden!*

*Es gilt auf Grund der Symmetrie* (1) *der Anordnung für das Feld eines langgestrecken Leiters*

$$\vec{B}(x) = -\frac{I}{2\pi x}\vec{e}_z \quad (1)$$

f) Bestimmen Sie jetzt erneut die induzierte Spannung für $t > 0$ (mit Begründung!).

*Da immer noch gilt*

$$\vec{B}(x) \neq f(t) \quad (1/2)$$

*ist $\vec{B}(x)$ für jedes $x$ zeitlich konstant und es kann sofort*

$$U_{ind}(t) = \frac{I}{2\pi(x_0 - vt)} \left(h_0 v + 2cv^2 t\right) \quad (1)$$

*schreiben.*

g) Bestimmen Sie die induzierte Spannung, die sich aus der Überlagerung der beiden Felder $\vec{B}_0 + \vec{B}(x)$ bei ansonsten gleichen Bedingungen für $t > 0$ ergibt.

*Es lässt sich das Superpositionsgesetz anwenden und man erhält sofort*

$$U_{ind}(t) = \left(B_0 + \frac{I}{2\pi(x_0 + vt)}\right) \left(h_0 v + 2cv^2 t\right) \quad (1)$$

---

*Summe: 16 Punkte*

# 5 Elektrostatik

*Punkte für die Aufgabe: 18*

Es seien drei ortsfeste Punktladungen ($Q_1$ bis $Q_3$) nach Abbildung 16 gegeben. Eine Probeladung $q$ sei ortsfest an der Position $(4|0)$ eingebracht.

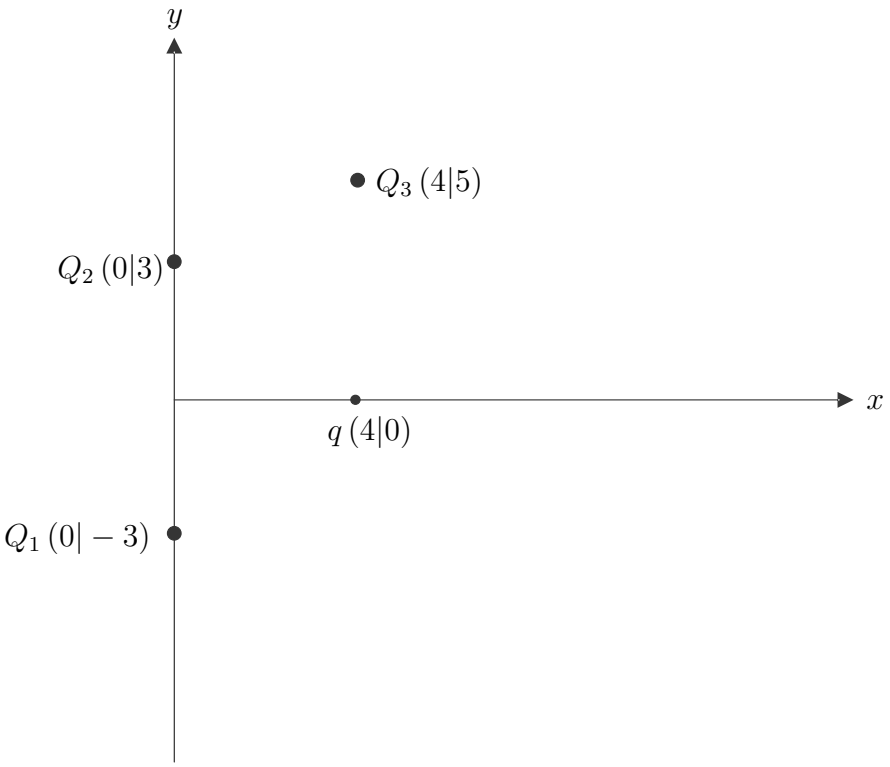
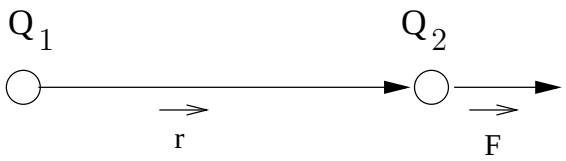



**Abbildung 16:** Anordnung von Ladungen

a) Wie lautet das Coulomb'sche Gesetz in Vektorschreibweise? Verdeutlichen Sie es zusätzlich durch eine Zeichnung (qualitativ).

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot r^2} \cdot \vec{e_r} \qquad (1)$$



(1)

b) Bestimmen Sie die einzelnen Kräfte ($\vec{F}_1$ bis $\vec{F}_3$), die durch die Punktladungen ($Q_1$ bis $Q_3$) auf die Probeladung ausgeübt werden.

$$\vec{F}_1 = \frac{Q_1 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{Q_1 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 25} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_2 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{Q_2 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 25} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{F}_3 = \frac{Q_3 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{Q_3 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 25} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

c) Wie groß ist die Gesamtkraft auf die Probeladung, wenn gilt: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$?

$$\vec{F_{ges}} = \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\vec{F_{ges}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\
&= \frac{Q_1 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{Q_2 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{Q_3 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{Q \cdot q \cdot \sqrt{89}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{89}} \\ \frac{-5}{\sqrt{89}} \end{pmatrix} \quad (2)
\end{aligned}$$

d) In welchem Punkt auf der y-Achse ist eine weitere Ladung $Q_4$ zu positionieren, damit die Gesamtkraft auf die Probeladung zu Null wird ($\vec{F_{ges}} = 0$)?

*Vektorielle Berechung des Schnittpunktes mit der y-Achse:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow 4 + 8s = 0 \ \wedge \ -5s = y$$
$$\Rightarrow s = -\frac{1}{2} \ \wedge \ y = \frac{5}{2}$$

*Die Punktladung $Q_4$ muss auf der y-Achse im Punkt $(0|\frac{5}{2})$ positioniert werden.* (2)

e) Wie groß muss $Q_4$ dimensioniert werden?

*Die Dimensionierung der Punktladung $Q_4$ kann durch die Berechnung des Kräftegleichgewichts erhalten werden:*

$$\begin{aligned}
\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} &= 0 \\
\Leftrightarrow \vec{F_4} &= -(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}) \\
\Leftrightarrow \frac{Q_4 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \frac{89}{4}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{89}} \\ \frac{-5}{\sqrt{89}} \end{pmatrix} &= -\frac{Q \cdot q \cdot \sqrt{89}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot 125} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{89}} \\ \frac{-5}{\sqrt{89}} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \frac{4 \cdot Q_4}{89} &= -\frac{\sqrt{89} \cdot Q}{125} \\
\Leftrightarrow Q_4 &= -\frac{89 \cdot \sqrt{89}}{500} \cdot Q \\
\Leftrightarrow Q_4 &= -\frac{89^{\frac{3}{2}}}{500} \cdot Q \\
\Leftrightarrow Q_4 &\approx \textit{-1,68} \cdot Q
\end{aligned}$$

(2)

Es gelte nun: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ und $Q_4 = -2Q$. Die Anordnung befinde sich im $\mathbb{R}^3$.

f) Wie lautet allgemein der Ansatz, wenn die elektrische Flussdichte $\vec{D}$, welche von den Ladungen $Q_1 \ldots Q_4$ verursacht wird, bestimmt werden soll?

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \sum Q_{ges}$$ (1)

g) Welche einfache geometrische Form sollte für die Bestimmung der Hüllfläche zur Bestimmung von $\vec{D}$ genutzt werden?

*Kugel* (1)

Es seien die Abstände der Ladungen zueinander sehr klein im Verhältnis zur Dimensionierung der geometrischen Struktur.

h) Welche Vereinfachung bezüglich des Feldes der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$ darf nun getroffen werden?

*Fernfeld, daher radialsymetrisch:* $\vec{E} = \left|\vec{E}\right| \cdot \vec{e}_r$ (1)

i) Bestimmen Sie $\vec{D}$ für die Anordnung aus Abbildung 16. Bestimmen Sie hierfür das Oberflächenintegral für die von Ihnen gewählte geometrische Struktur.

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \sum Q_{ges}$$

$$\oint_A \left|\vec{D}\right| \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \left|d\vec{A}\right| = 3Q - 2Q$$

$$\left|\vec{D}\right| \cdot \oint_A \left|d\vec{A}\right| = Q$$

$$\left|\vec{D}\right| \cdot \int_0^{2\Pi} \int_0^{\Pi} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = Q$$

$$\left|\vec{D}\right| \cdot 4\Pi r^2 = Q$$

$$\left|\vec{D}\right| = \frac{Q}{4\Pi r^2} \quad (2)$$

j) Geben Sie das $\vec{E}$-Feld an.

$\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \Pi \epsilon_0 \epsilon_1 r^2} \cdot \vec{e}_r$ (1)

---

## *Summe: 18 Punkte*

# 6 Ortskurven

*Punkte für die Aufgabe: 14*

Die Ortskurve aus Abbildung 17 soll untersucht werden.

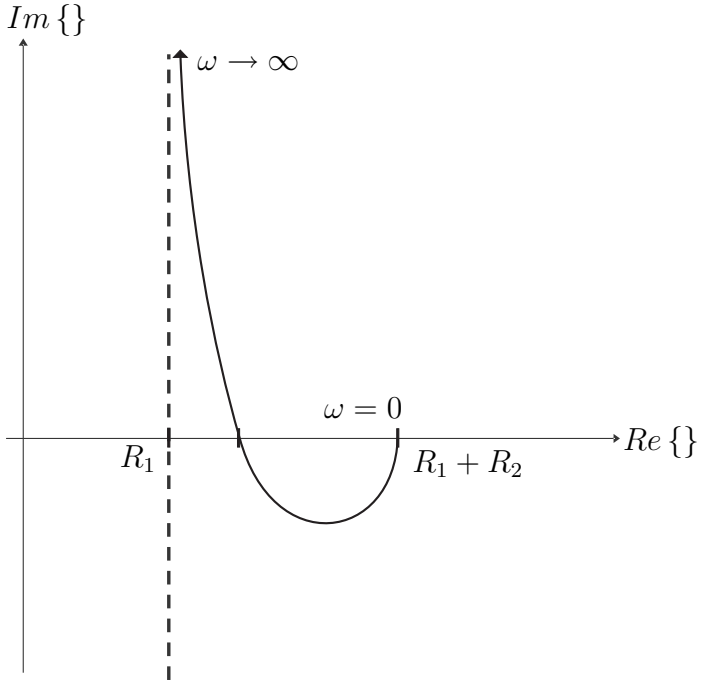



**Abbildung 17:** Ortskurve

a) Benennen Sie die in Abbildung 17 dargestellte Betrachtungsebene (Admittanz oder Impedanz) und begründen Sie Ihre Antwort.

*Impedanzebene, erkennbar an den Widerständen* (1)

b) Skizzieren Sie die Ortskurve auf Ihrem Lösungsblatt und markieren Sie in Ihrer Skizze den Resonanzpunkt.

*Schnittpunkt mit der reellen Achse* (1)

c) Leiten Sie im Folgenden weitere Informationen aus der Ortskurve (Abbildung 17) ab.

c.1) Zerlegen Sie die Ortskurve in 2 Teile und zeichnen Sie für jeden Teil ein Ersatzschaltbild.

*Zwei Widerstände vorhanden => zwei Teile*

*Kurve ist in der Impedanzebene um R1 verschoben => R1 muss in Reihe zu einem anderen*

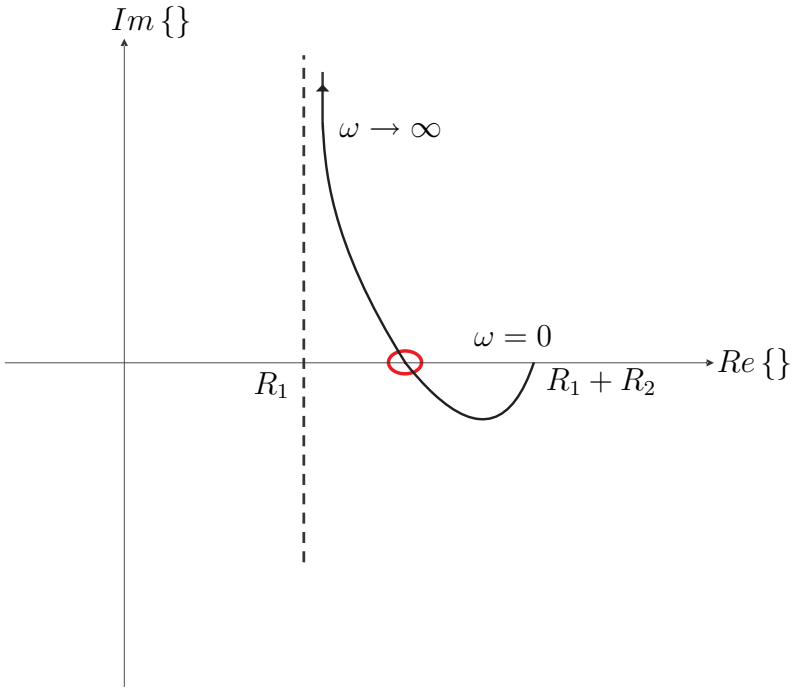



**Abbildung 18:** Ortskurve mit eingezeichneter Resonanz

*Schaltungsteil liegen*
*Resonanz erkennbar ⇒ C und L vorhanden*
*gebogener Teil geht ins negative ⇒ C parallel zu R2*
*Ortskurve geht ins unendliche gegen R1 ⇒ L in Reihe zu R1*

2

c.2) Zeichnen Sie das gesamte Ersatzschaltbild der Ortskurve, indem Sie die beiden Teile aus Aufgabenteil c.1) sinnvoll zusammenfügen.

1

c.3) Bestimmen Sie rechnerisch die Impedanz $\underline{Z}$ der Ersatzschaltung aus Aufgabenteil c.2).

$$\underline{Z} = j\omega L + R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

2

c.4) Bestimmen Sie rechnerisch die Kapazität C, bei der die Ersatzschaltung keine anregbare Resonanz besitzt. Gehen Sie von der Impedanz $\underline{Z}$ aus Aufgabenteil c.3) aus.

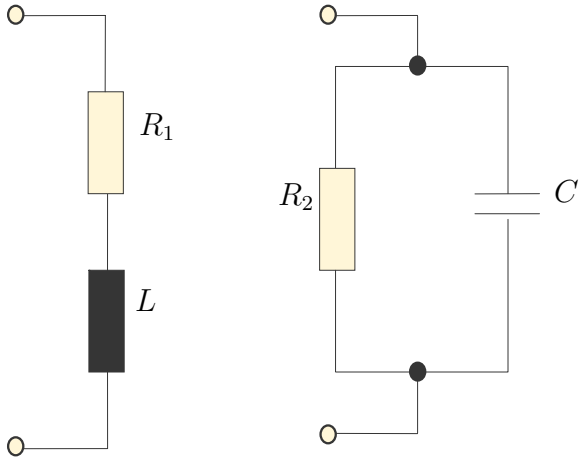



**Abbildung 19:** ESB für jeden Teil der Ortskurve

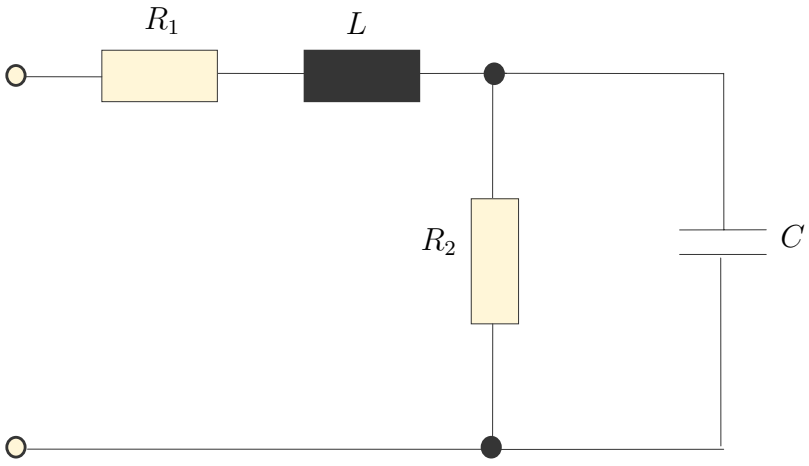



**Abbildung 20:** ESB für die gesamte Ortskurve

*Seperation des imaginär Teils:*

$$\underline{Z} = j\omega L + R_1 + \frac{R_2 \cdot (1 - j\omega R_2 C)}{(1 + j\omega R_2 C) \cdot (1 - j\omega R_2 C)}$$

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{(1 + (\omega R_2 C)^2)} + j \cdot \left( \omega L - \frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega R_2 C)^2} \right) \quad (2)$$

*Bestimmung von* $\omega$, $Im(\underline{Z}) = 0$*:*

$$\omega L - \frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega R_2 C)^2} = 0$$

$$\omega L \cdot (1 + (\omega R_2 C)^2) - \omega R_2^2 C = 0$$

$$\omega L + \omega^3 L \cdot (R_2 C)^2 - \omega R_2^2 C = 0$$

$$\omega \cdot (L + \omega^2 L \cdot (R_2 C)^2 - R_2^2 C) = 0 \quad (2)$$

*Der geklammerte Term muss gleich 0 werden:*

$$L + \omega^2 L \cdot (R_2 C)^2 - R_2^2 \cdot C = 0$$

$$\omega = \frac{+}{-} \sqrt{\frac{R_2^2 C - L}{L(R_2 C)^2}}$$

*Damit keine Resonanz mehr anregbar ist,*

*muss der positive Teil der Wurzel 0 werden:* (1)

$$0 = \sqrt{\frac{R_2^2 C - L}{L(R_2 C)^2}}$$

*Somit folgt für C:*

$$C = \frac{L}{R_2^2} \quad (1)$$

d) Ändern Sie die Ortskurve aus Abbildung 17 ab, so dass keine Resonanz mehr anregbar ist. Zeichnen Sie die neue Ortskurve.

(1)

---

*Summe: 14 Punkte*

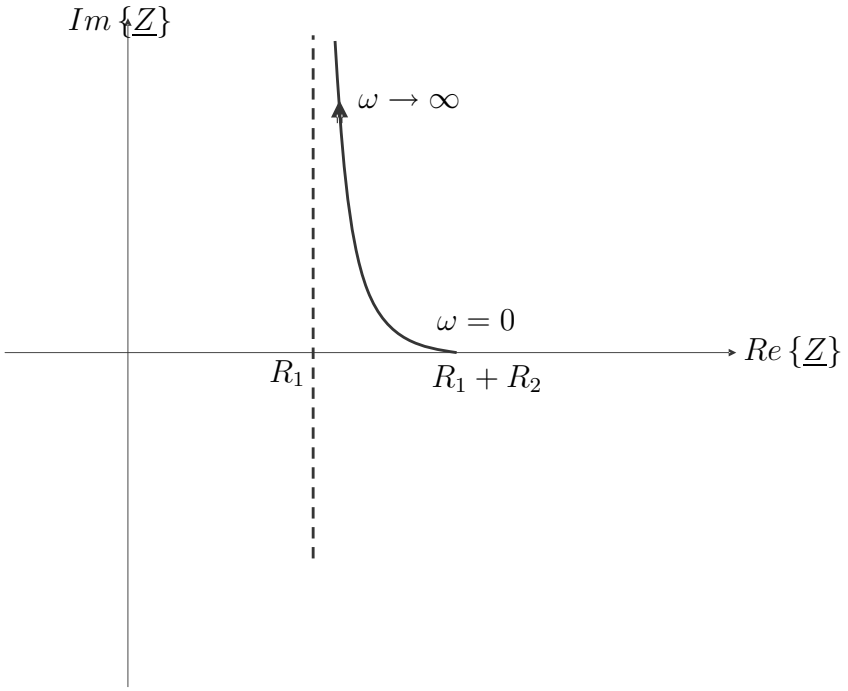



**Abbildung 21:** Ortskurve ohne anregbare Resonanz

| Aufgabe 3 | Name: | Vorname: | Matrikelnr.: |
|---|---|---|---|

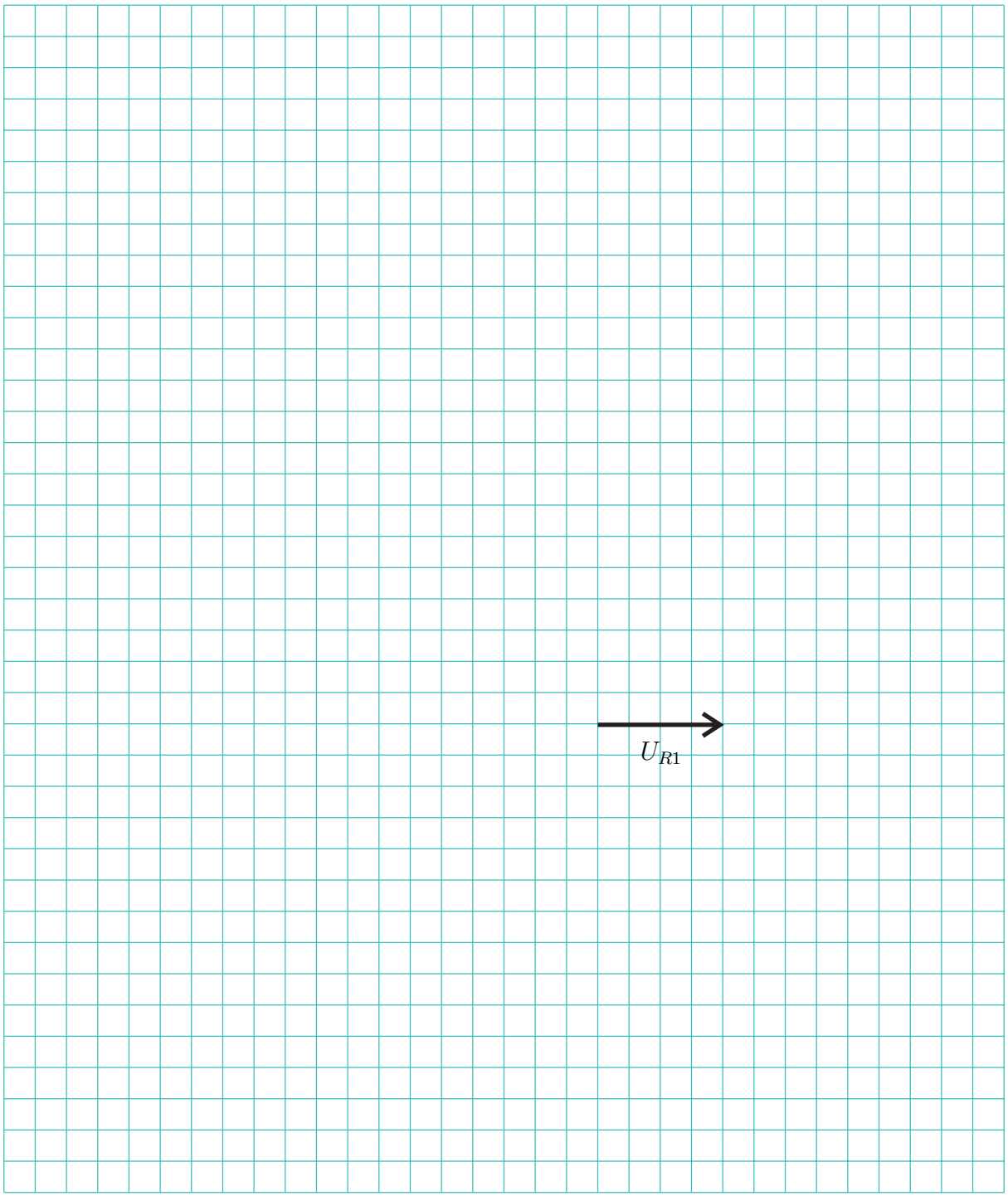



**Abbildung 22:** Zeichenblatt zum Zeigerdiagramm